

# מכינה במתמטיקה

פרק 29 - גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה

תוכן העניינים

1. הגדרות יסודיות.....1
2. הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה.....2
3. רדיוסים של היפרבולה.....3
4. מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה.....4
5. אסימפטוטות של היפרבולה.....5

## הגדרות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא היפרבולה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי ההיפרבולה.



- משוואת היפרבולה קנונית:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
- היפרבולה שבה  $a = b$ , נקראת היפרבולה שוות שוקיים.
- הקשר בין הפרמטרים:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

### שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי ההיפרבולה שמשוואתה  $x^2 - 4y^2 = 36$ .
- (2) מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 18 ואורך צירה המדומה הוא  $2\sqrt{3}$ .
- (3) מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 12 והמרחק בין מוקדיה הוא 20.

### תשובות סופיות:

- (1) אורך הציר הממשי: 12, אורך הציר המדומה: 6.

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{80} = 1 \quad (3)$$

## הקשר בין הפרמטרים של ההיפרבולה:

### שאלות:

(4) מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה המדומה הוא  $8\sqrt{5}$  והיא עוברת בנקודה  $(-10, 3\sqrt{5})$ .

(5) מצא משוואת ההיפרבולה שוות שוקיים שהמרחק בין מוקדיה הוא  $\sqrt{200}$ .

### תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1 \quad (4)$$

$$x^2 - y^2 = 25 \quad (5)$$

## רדיוסים של היפרבולה:

### סיכום כללי:

| רדיוסים באליפסה          | רדיוסים בהיפרבולה                       |
|--------------------------|-----------------------------------------|
| $r_1 = a - \frac{cx}{a}$ | $r_1 = \left  \frac{cx}{a} - a \right $ |
| $r_2 = a + \frac{cx}{a}$ | $r_2 = \left  \frac{cx}{a} + a \right $ |

### שאלות:

- (6) נתונה היפרבולה שמשוואתה:  $6x^2 - y^2 = 18$ . מצא על ההיפרבולה את הנקודות שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 25.
- (7) נתונה היפרבולה שמשוואתה:  $7x^2 - 9y^2 = 63$ . מצא על ההיפרבולה את הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מהמוקדים הוא  $74\frac{8}{9}$ .
- (8) נתונה היפרבולה שמשוואתה  $4x^2 - y^2 = 20$ . מצא נקודה על ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.
- (9) נתונה היפרבולה שמשוואתה  $5x^2 - 4y^2 = 80$ . מנקודה A שעל ההיפרבולה ברביע הראשון העבירו ישר מקביל לציר ה- $x$ , החותך את הענף השמאלי של ההיפרבולה בנקודה B. את נקודה A חיברו עם המוקד הימני  $F_1$  של ההיפרבולה ואת הנקודה B חיברו עם המוקד השמאלי של ההיפרבולה  $F_2$ . נתון כי היקף הטרפז  $F_1BAF_2$  הוא 29 יחידות אורך. מצא את שיעורי הנקודה A.

### תשובות סופיות:

- (6)  $(\pm 2, \pm \sqrt{6})$
- (7)  $(\pm 4, \pm 2\frac{1}{3})$
- (8)  $(3, -4)$
- (9)  $(5, \frac{\sqrt[3]{5}}{2})$

## מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה:

**סיכום כללי:**

מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה, היא:  $-\frac{a^2}{b^2}$ .

**שאלות:**

**(10)** נתונה היפרבולה שמשוואתה  $4x^2 - 3y^2 = 24$ . מצא את משוואתו של מיתר בהיפרבולה, שהנקודה  $(3, 4)$  היא אמצעו.

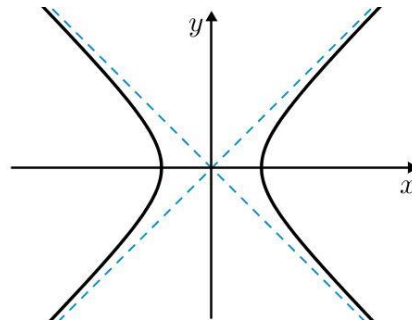
**תשובות סופיות:**

$$y = x + 1 \quad (10)$$

## אסימפטוטות של היפרבולה:

### סיכום כללי:

לכל היפרבולה יש שתי אסימפטוטות משופעות, שענפי ההיפרבולה שואפים אליהן.



- משוואות האסימפטוטות הן:  $y = \frac{b}{a}x$  ,  $y = -\frac{b}{a}x$ .

### שאלות:

**11** מצא את משוואת האסימפטוטות של היפרבולה שמשוואתה  $4x^2 - y^2 = 48$ .

**12** הישר  $y = -\frac{3}{4}x$  הוא אסימפטוטה של היפרבולה, שהמרחק בין מוקדיה הוא 20. מצא את משוואת ההיפרבולה.

**13** נתונה היפרבולה שמשוואתה  $9x^2 - 4y^2 = k$  ואורך צירה המדומה הוא 6. מצא נקודה על האסימפטוטה היורדת של ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

**14** ישר שעובר בנקודה  $(-6, 8)$  הוא אסימפטוטה של היפרבולה שעוברת בנקודה  $(9, -8\sqrt{2})$ .  
 א. מצא את משוואת ההיפרבולה.  
 ב. מצא את מרחק אחד ממוקדי ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שלה.

**15** מוקדיה של היפרבולה שעוברת בנקודה  $(4, -1)$  מתלכדים עם מוקדיה של אליפסה שמשוואתה  $16x^2 + 25y^2 = 400$ . מצא נקודה על הענף השמאלי של ההיפרבולה, שמרחקה מהאסימפטוטה העולה של ההיפרבולה הוא  $1\frac{1}{3}$ .

**תשובות סופיות:**

$$y = 2x, y = -2x \quad (11)$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad (12)$$

$$(2, -3) \quad (13)$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\text{ב. } d = 4$$

$$\left(-3, \frac{1}{\sqrt{8}}\right) \quad (15)$$